理論 第 2 問 ターンテーブルの上のボール [10.0 点]

前文

表記と慣例：ベクトル $\vec{A}$ の長さは，単に $A \equiv |\vec{A}|$ と表記する．その x, y, z 成分は，それぞれ A_x, A_y, A_z と表す．ある量の時間微分は，その量の上のドットで示す: $\dot{\vec{A}} \equiv d\vec{A}/dt$, $\dot{A} \equiv dA/dt$. ベクトル $\vec{A}$ の方向に沿った単位ベクトルは $\hat{A}$ と表す．したがって，直交座標に沿った単位ベクトルは，$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ となる．スカラー積とベクトル積の定義は次のとおりである：

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{A}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$$

$$(\vec{A}\times\vec{B}) = -(\vec{B}\times\vec{A})$$
$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\sin\theta,$$

ここで θ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の間の角度である．ベクトルとその乗算について，次のような性質が必要になることがある．ベクトル三重積の法則は:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A},$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A} = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}.$$

ベクトル積は，例えば，

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r},$$
$$\vec{F}_{Lorentz} = Q\vec{v}\times\vec{B},$$

など，物理学の多くの関係を記述するのに非常に便利である．

多くの場合，ベクトル成分に関する 3 つの方程式を 1 つの方程式にまとめ，時間を節約することができる．

問題の提示

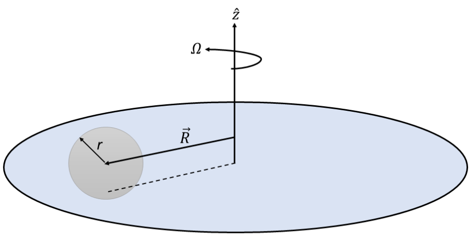

図 1. ターンテーブル上を滑ることなく転がるボール

質量 m で半径 r の球が，水平なターンテーブルの上を滑ることなく転がっている（図 1 参照）．その質量密度は球面対称，すなわち中心からの距離にのみに依存する．ボールの慣性モーメントは I である．ターンテーブルが自由に回転できるパート B と C では，ターンテーブルの慣性モーメントを I_d と表記する．この問題の目的は，実験室系でボールの運動と軌道を解析することである．この問題では，ボールが落ちないようにターンテーブルを十分な大きさにしておく．記号について，以下の表記を使用する:

Ω - ターンテーブルの角速度の大きさ,

$\vec{\omega}$ - ボールの回転軸に対する回転角速度,

$\vec{R}$ - ターンテーブルの回転軸に対するボールの中心の水平位置,

$\vec{v}$ - 実験室系の R におけるボールの速度.

ボールの初期位置 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$ と速度 $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$, ターンテーブルの角速度 $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$ は既知であるとする．初期ベクトル量 $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(0)$ と $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(0)$, については，その方向が既知であるとする．また，ベクトル量を表現する必要があるときは，$\hat{z}$ を使って表現することができる．また，既知の量について式を書くように求められたら，m, r, I, I_d のいずれか，またはすべてを使用してもよい．特に断りのない限り，I は一般的なものとしてよい．次の表記が推奨される：

$\alpha = \frac{I}{I+mr^2}$, $\delta = \frac{I_d}{mr^2}$,

最終的な答えは，軸方向のクロスプロダクト（ベクトル積），ドットプロダクト（スカラー積），単位ベクトルを含むベクトル式で書くことができる．

パート A：角速度一定のターンテーブル上のボール [1.5 点]

まず，ターンテーブルの角速度が垂直軸 $\hat{z}$ に対して一定で，したがって $\Omega = \Omega_0$ という最も単純なケースから始める．

A.1	ボールの速度 $\vec{v}$ を $\Omega, \vec{\omega}, r$ と $\vec{R}$ で表せ．	0.1pt
A.2	前問の結果に対して，小球の中心に対するニュートンの式とトルク（力のモーメント）の式をふまえて，ボールの加速度 $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ を $\Omega, \vec{v}, r, m$ と I で表せ．	0.2pt
A.3	前問の結果から，速度 $\vec{v}$ を $\Omega, \vec{R}, \vec{v}_0, \vec{R}_0, r, m$ と I で表せ．	0.2pt
A.4	ボールの軌跡を求めよ．与えられた初期条件 $\vec{v}_0$ と $\vec{R}_0$ が与えられたときのボールの軌跡の具体的な解を求めよ．	0.5pt
A.5	今回，ボールが一様な質量密度 $I = 2mr^2/5$ を持つとする．あなたが見つけた軌道には，その大きさを定義する 1 つのパラメータ R_t がある．その大きさは，R_0 と同じになるように選ぶ．ボールがテーブル上の初期位置 ($t = 0$ におけるターンテーブルの位置) に最も近い距離で接近するのにかかる時間はどれくらいか？	0.5pt

パート B：自由に回転するターンテーブルの上のボール [4.0 点]

このパートでは，ターンテーブルは z-軸の周りに摩擦なく自由に回転することができる．したがって，その自由な回転は，ボールの摩擦によってのみ妨げられる．

B.1	ボールの速度 $\vec{v}$ と加速度 $\dot{\vec{v}}$ を Ω , $\vec{R}, \Omega_0, \vec{R}_0, \dot{\Omega}, r,\ m$ と I で表せ．	0.2pt
B.2	ターンテーブルの角加速度 $\dot{\Omega}$ の大きさを $\Omega, \Omega_0, \vec{R}, \vec{R}_0, \vec{v}_0, r,\ m,\ I$ と I_d で表せ．この問題の冒頭で定義した定数 α と δ を用いてもよい．	0.6pt

B.3	ターンテーブルの角速度 Ω の大きさを R のみの関数として表せ．この定数を Ω_0, R, r, m, I , I_d で表せ．	0.6pt

B.4	B.3 の結果から，与えられた Ω_0, R_0 に対して，最大の Ω を求めよ．	0.1pt

B.5	システム全体の角運動量を垂直成分 $\hat{z}M_z$ を書き下せ．定数項を差し引き，残った部分を $\hat{z}L$ と名付ける． B.1 では，ボールの速度 $\vec{v}$ を求めたが，ボールの位置 $\vec{R}$ に依存する項と定数ベクトルの和で表される．この定数ベクトルを $\vec{c}$ とする．x-軸の方向をこのベクトルの方向に，y-軸の方向を $\hat{z}\times\vec{c}$ に選べ．この座標系で，Ω を $L, \vec{R}, \vec{c}, \hat{z}, R^2, r, m, I$ と I_d の関数として求めよ．これを B.3 の結果と合わせて，R^2 と y の変数と L, r, m, I, c と I_d を含む方程式を書き下せ．ここで，c は $\vec{c}$ の大きさである．$R^2 = x^2 + y^2$ を代入して，x と y の変数だけを含む表式を求め，曲線を描け．これから，すべての可能な軌跡をリストアップせよ．	2.5pt

パート C：磁場中のターンテーブル上のボール [4.5 点]

このパートでは，密度分布が $I = mr^2/10$ となるような状況を考える．これは，例えば，ボールが半径の半分まで均一な密度で満たされ，残りの部分は無視できる質量である場合に実現できる．さらに，ボールの外表面には一様な電荷密度 $Q/(4\pi r^2)$, ここで Q は全表面電荷である．セットアップ全体は，均一な磁場 B ，すなわち，$\hat{z}$方向にある磁場の中にある．ターンテーブルはパート A と同じように，定数 Ω で回転する．

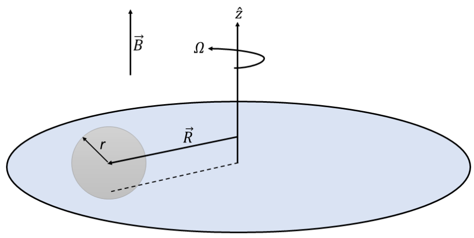

図 2. 一定磁場 B の中でターンテーブル上を転がるボール

C.1	ボールの運動のニュートン方程式とトルク $\vec{\tau}_s$ の方程式を書き下せ．ボールが軸を中心に回転することによるトルクの式を $Q, r, \vec{\omega}$ と $\vec{B}$ により表せ．	0.5pt

C.2	C.1 の結果を用いて，実験室系に対するボールの直線加速度を $Q, r, \vec{\omega}$ と $\vec{B}$ で表せ．	0.5pt

C.3	単位長さの量はすべてメートル，角速度はすべて 1 ヘルツ，時間の量はすべて 1 秒を単位とするとする。 C.2 で求めた直線加速度の式は，$\vec{R}$ に関する次の形の 2 階微分方程式である： $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \gamma\frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta\vec{R} = 0.$ γ と β の定数を Q, r, B, I, m, Ω で表せ．これから，$\vec{R}$ の成分を極座標に変換する: $x(t) = \rho(t)\cos(\eta(t)),$ $y(t) = \rho(t)\sin(\eta(t))$ 新しい微分方程式は 1 次の時間微分項を持たない．ここで，極角 $\eta(t)$ は時間の関数である．この関数を求めよ． 新しい微分方程式の $\rho(t)$ の係数 β' を γ と β で表せ. 時間に対する $\rho(t)$ の振る舞いが，調和的，指数的など，さまざまなタイプになる条件を書き下せ。	1.0pt
C.4	パート C.3 で求めた解の初期条件を次のように考える． $x(0) = 1\,\mathrm{m}, y = 0\,\mathrm{m}, v_x(0) = x\|_{t=0} = 1\,\mathrm{m/s}, v_y(0) = \dot{y}\|_{t=0} = -1\,\mathrm{m/s}.$ この条件から, β と γ を求めよ. これを用いて，対応する Ω を求めよ． 球の中心の軌跡を描け．球の表面の電荷は負か正か？負なら $-$ また正なら $+$ と解答用紙に書け．	0.9pt
C.5	パート C.4 で見つけた解を考えてみよう。正しく認識できたのであれば，その解は回転する $\vec{R}(t)$ を持つはずである．$N \gg 1$ の回転数に対するエネルギーの総変化量と 1 回転あたりの変化量の式を求めよ．ここで N に比べて小さい項は無視してかまわない．このパートでは，ボールの質量と半径は $m = 1\,\mathrm{kg}$ と $r = 1\,\mathrm{m}$ したがって $I = 1/11\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ である．	1.6pt